Getallen en variabelen met elkaar vermenigvuldigen

Als we zowel getallen als variabelen met elkaar vermenigvuldigen, dan rekenen we het product van de getallen uit.

Zo wordt:

$$2a \cdot 2b = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot b = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 4ab$$

Getallen en variabelen vermenigvuldigen:

1. Vermenigvuldig de getallen en schrijf de uitkomst vooraan.
2. Schrijf de variabelen in alfabetische volgorde achter het getal
3. Noteer gelijke variabelen als macht en laat de vermenigvuldigingstekens weg.

----- Voorbeeld 1 -----

Herleid

$3x^2 \cdot 5xy$

Oplossing

$= 15x^3y$

Uitleg:

$$\begin{aligned}
&3x^2 \cdot 5xy \\
&= 3 \cdot x^2 \cdot 5 \cdot x \cdot y \\
&= 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot xy && \text{| vermenigvuldig de getallen} \\
&= 15 \cdot x^2 \cdot xy && \text{| schrijf de gelijke variabelen als macht} \\
&= 15 \cdot x^3y && \text{| laat het vermenigvuldigingsteken weg} \\
&= 15x^3y
\end{aligned}$$

----- Voorbeeld 2 -----

Herleid

$2ac \cdot 3a^2b \cdot 4b$

Oplossing

$= 24a^3b^2c$

Uitleg:

$2ac \cdot 3a^2b \cdot 4b$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ac \cdot a^2b \cdot b$ | vermenigvuldig de getallen

$= 24 \cdot ac \cdot a^2b \cdot b$ | zet gelijke variabelen bij elkaar in alfabetische volgorde

$= 24 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c$ | schrijf de gelijke variabelen als macht

$= 24 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c$ | laat het vermenigvuldigingsteken weg

$= 24a^3b^2c$

- - - - -

Machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigen

Voor het vermenigvuldigen van machten geldt de volgende regel:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Twee machten met hetzelfde grondtal kunnen we met elkaar vermenigvuldigen. Dit doen we door de exponenten bij elkaar op te tellen.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{m keer}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n keer}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n)\text{ keer}} = a^{m+n}$$

----- Voorbeeld -----

Herleid $x^5 \cdot x^2$

Oplossing

$= x^7$

Uitleg:

$x^5 \cdot x^2$ | x^5 en x^2 volledig uitschrijven
$= (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x)$ | de haakjes weglaten
$= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ | opnieuw schrijven als een macht
$= x^7$

----- Voorbeeld -----

Herleid $3a^2 \cdot b^2 \cdot a^4 \cdot 5b^7$

Oplossing

$= 15 \cdot a^6 \cdot b^9$

Uitleg:

$3a^2 \cdot b^2 \cdot a^4 \cdot 5b^7$ | alle termen met hetzelfde grondtal bij elkaar zetten
$= (3 \cdot 5) \cdot (a^2 \cdot a^4) \cdot (b^2 \cdot b^7)$ | de producten volledig uitschrijven
$= 15 \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b)$ | opnieuw schrijven als een macht
$= 15 \cdot a^6 \cdot b^9$

Machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigen

Voor het vermenigvuldigen van machten geldt de regel:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Twee machten met hetzelfde grondtal kunnen we met elkaar vermenigvuldigen. Dit doen we door de exponenten bij elkaar op te tellen.

$$a^{m} \cdot a^{n} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m keer}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n keer}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n)\text{ keer}} = a^{m+n}$$

----- Voorbeeld -----

Gebruik de rekenregel en schrijf $8^3 \cdot 8^4$ korter op.

Oplossing:

8^7

Uitleg:

$$8^{3} \cdot 8^{4}$$
$$= \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8}_{\text{drie keer}} \cdot \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}_{\text{vier keer}}$$
$$= \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}_{\text{drie keer + vier keer}}$$
$$= 8^{3+4}$$
$$= 8^{7}$$

Getallen en variabelen met elkaar vermenigvuldigen

Als we zowel getallen als variabelen met elkaar vermenigvuldigen, dan rekenen we het product van de getallen uit.

Zo wordt:

$$2a \cdot 2b = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot b = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 4ab$$

Getallen en variabelen vermenigvuldigen:
1. Vermenigvuldig de getallen en schrijf de uitkomst vooraan.
2. Schrijf de variabelen in alfabetische volgorde achter het getal
3. Noteer gelijke variabelen als macht en laat de vermenigvuldigingstekens weg.

----- Voorbeeld 1 -----

Herleid

$3x^2 \cdot 5xy$

Oplossing

$= 15x^3y$

Uitleg:

$3x^2 \cdot 5xy$

$= 3 \cdot x^2 \cdot 5 \cdot x \cdot y$

$= 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot xy$ | vermenigvuldig de getallen

$= 15 \cdot x^2 \cdot xy$ | schrijf de gelijke variabelen als macht

$= 15 \cdot x^3y$ | laat het vermenigvuldigingsteken weg

$= 15x^3y$

----- Voorbeeld 2 -----

Herleid

$2ac \cdot 3a^2b \cdot 4b$

Oplossing

$= 24a^3b^2c$

Uitleg:

$2ac \cdot 3a^2b \cdot 4b$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ac \cdot a^2b \cdot b$ | vermenigvuldig de getallen

$= 24 \cdot ac \cdot a^2b \cdot b$ | zet gelijke variabelen bij elkaar in alfabetische volgorde

$= 24 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c$ | schrijf de gelijke variabelen als macht

$= 24 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c$ | laat het vermenigvuldigingsteken weg

$= 24a^3b^2c$

- - - - -

Gelijksoortige termen samennemen

Combinaties van getallen en variabelen mogen we **samennemen** als ze gelijksoortige termen bevatten.

Getallen en variabelen vermenigvuldigen:
1. Zet gelijksoortige termen naast elkaar.
2. Neem de gelijksoortige termen samen.
3. Zet de termen in alfabetische volgorde en een los getal achteraan.

----- Voorbeeld 1 -----

Herleid:

$3a^2 + 4a^2$

Oplossing

$= 7a^2$

Uitleg:

Beide termen in de som hebben een $\mathbf{a^2}$. Dit zijn dus gelijksoortige termen.
Gelijksoortige termen kunnen we samennemen:

$$3 \cdot a^2 + 4 \cdot a^2 = 7 \cdot a^2$$

----- Voorbeeld 2 -----

Herleid:

$-3x^2 + 2x - 2 + 4x^2$

Oplossing

$= x^2 + 2x - 2$

Uitleg:

De termen $\mathbf{-3x^2}$ en $\mathbf{4x^2}$ mogen we samennemen omdat ze gelijksoortig zijn.

$-3x^2 + 2x - 2 + 4x^2$	| schrijf gelijksoortige termen naast elkaar
$= -3x^2 + 4x^2 + 2x - 2$	| neem de gelijksoortige termen samen
$= x^2 + 2x - 2$	| de termen staan al in de juiste volgorde

Rekenvolgorde bij optellen en vermenigvuldigen met variabelen

Bij herleiden geldt dezelfde rekenvolgorde als bij getallen.

Let bij **optellen en vermenigvuldigen met variabelen** op de juiste volgorde:
Stap 1. Vermenigvuldig eerst alle getallen en variabelen.
Stap 2. Neem de gelijksoortige termen samen.
Stap 3. Schrijf de termen in alfabetische volgorde, een los getal achteraan.

---- Voorbeeld ----

Herleid:
$4x \cdot 5y + 2x \cdot -9 + 3 \cdot 7x$

Oplossing

$= 20xy + 3x$

Uitleg:

$4x \cdot 5y + 2x \cdot -9 + 3 \cdot 7x$	vermenigvuldig alle getallen en variabelen
$= 20xy + -18x + 21x$	neem gelijksoortige termen samen
$= 20xy + 3x$	

Machten van machten

Voor het nemen van de macht van een macht geldt de volgende regel:
$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Een macht tot een macht berekenen we door de exponenten met elkaar te vermenigvuldigen. Het grondtal blijft gelijk.

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ keer}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ keer}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ keer}}}_{n \text{ keer}} = a^{m \cdot n}$$

---- Voorbeeld 1 ----

Herleid $\left(x^3\right)^2$

Oplossing

$= x^6$

Uitleg:

$\left(x^3\right)^2$ | volledig uitschrijven

$= \left(x \cdot x \cdot x\right)^2$ | het kwadraat uitschrijven

$= \left(x \cdot x \cdot x\right) \cdot \left(x \cdot x \cdot x\right)$ | de haakjes weglaten

$= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ | opnieuw schrijven als een macht

$= x^6$

---- Voorbeeld 2 ----

Herleid $\left(3x^3y^2\right)^4$

Oplossing

$= 81x^{12}y^8$

Uitleg:

$\left(3x^3y^2\right)^4$

$= \left(3x^3y^2\right) \cdot \left(3x^3y^2\right) \cdot \left(3x^3y^2\right) \cdot \left(3x^3y^2\right)$ | volledig uitschrijven

$= 3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^2$ | de haakjes weglaten

$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot y^2 \cdot y^2 \cdot y^2$ | in de juiste volgorde zetten

$= 81x^{12}y^8$ | herleiden

Machten met elkaar vermenigvuldigen

Voor het gehele getal n (n = 0 of positief) en de getallen a en b geldt de volgende regel:
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Machten kunnen we met elkaar vermenigvuldigen wanneer ze dezelfde exponenten hebben. In dat geval vermenigvuldigen we alleen de grondtallen.

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{\text{n keer}} \cdot \underbrace{b \cdot \ \dots \ \cdot b}_{\text{n keer}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \ \dots \ \cdot (a \cdot b)}_{\text{n producten}} = (a \cdot b)^n$$

----- Voorbeeld -----

Gebruik de rekenregel om $2^4 \cdot 5^4$ korter te schrijven.

----- Oplossing:

2^9

Uitleg:

$2^4 \cdot 5^4$ | de rekenregel toepassen

$= (2 \cdot 5)^4$ | product tussen de haakjes uitrekenen

$= 10^4$

Machten door elkaar delen

Voor het gehele getal n en de getallen a en b (met b ≠ 0) geldt de volgende regel:
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Machten kunnen we door elkaar delen wanneer ze dezelfde exponenten hebben. In dat geval delen we alleen de grondtallen door elkaar.

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot \ \dots \ \cdot a \ (\text{n keer})}{b \cdot \ \dots \ \cdot b \ (\text{n keer})} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ \dots \ \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{\text{dit zijn n identieke breuken}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

---- Voorbeeld ----

Gebruik de rekenregel om $\frac{6^4}{3^4}$ korter op te schrijven.

Oplossing:

2^4

Uitleg:

$$\frac{6^4}{3^4}$$

$$= \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \ (\text{vier keer})}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \ (\text{vier keer})}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{6}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{3}\right)}_{\text{de factoren zijn vier identieke breuken}}$$

$$= \left(\frac{6}{3}\right)^4$$

$$= 2^4$$